

Analyse dynamique d'un nouveau manipulateur parallèle spatial à 3 degrés de liberté

Jean-François Allan Clément M. Gosselin

Département de Génie Mécanique, Université Laval, Québec, Québec, Canada, G1K 7P4

Résumé

Ce travail présente l'architecture d'un nouveau manipulateur parallèle spatial à 3 degrés de liberté. L'étude de ce mécanisme a permis d'établir le problème géométrique inverse, les équations de vitesse et d'accélération (les matrices jacobiniennes) ainsi que de calculer les couples aux moteurs avec l'aide du principe du travail virtuel et de l'approche classique de Newton-Euler.

1. Cinématique

Le manipulateur étudié se compose d'un mécanisme à 6 barres (dont le mouvement est limité au plan xz) couplé par l'intermédiaire d'une articulation sphérique en C_3 à un mécanisme à 5 barres (mouvement seulement possible dans le plan yz). La figure 1 montre l'architecture du manipulateur avec ses principaux paramètres.

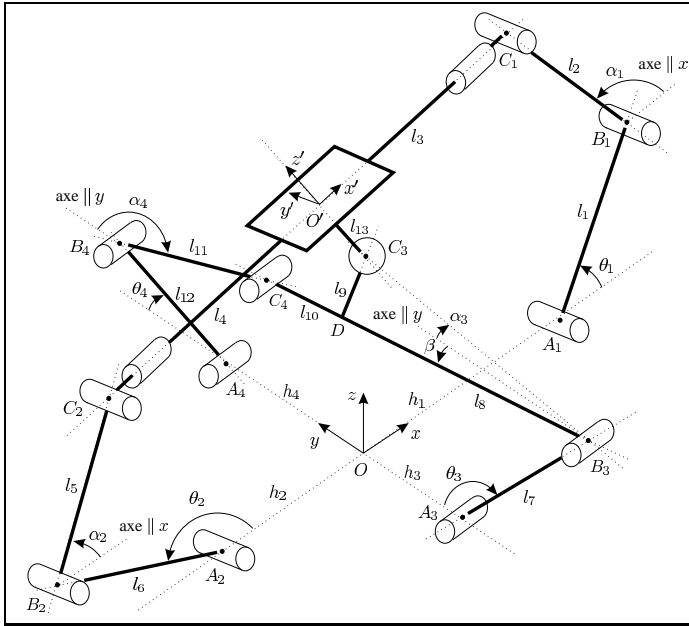


FIG. 1 – Manipulateur à 3 degrés de liberté

Un repère fixe \mathcal{R}_{xyz} d'origine O est placé sur la base. Celle-ci est formée par l'emplacement dans le plan xy de trois articulations rotoïdes motorisées (en A_1 , A_2 et A_3) et d'une articulation *passive* en A_4 qui sert principalement à assurer la stabilité du mouvement des membrures A_3B_3 , B_3D et DC_3 dans le plan yz . Un repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$ est attaché au centre de la plate-forme (l'axe z' suit la direction de C_3O') et son origine O' est contrôlée avec l'aide de 3 moteurs en A_1 , A_2 et A_3 . Puisque le point O' ne peut sortir du plan xz , le vecteur OO' est $\mathbf{p} = [x, 0, z]^T$. Pour représenter l'orientation de la plate-forme, une matrice de

rotation $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_x \mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_z$ est utilisée où les angles d'Euler autour de x , y et z sont respectivement ϕ , θ et ψ . Donc, la matrice \mathbf{Q} est (s_w et c_w correspond à $\sin w$ et $\cos w$)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\theta s_\psi & s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & -s_\phi c_\theta \\ -c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi + s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Lorsque le point O' est connu, on peut par la suite localiser les points C_1 , C_2 et C_3 avec les vecteurs $\mathbf{c}_1 = \mathbf{p} + \mathbf{Q}[l_3, 0, 0]^T$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{p} + \mathbf{Q}[-l_4, 0, 0]^T$ et $\mathbf{c}_3 = \mathbf{p} + \mathbf{Q}[l_{13}, 0, 0]^T$. Or, les contraintes du mécanisme indiquent que la coordonnée en x de \mathbf{c}_3 est nulle, ce qui implique que $x = l_{13} \sin \theta$. De manière similaire, puisque la coordonnée y en C_1 et en C_2 est nulle, on tire que $\tan \psi = -\tan \phi \sin \theta$. Donc, la position et l'orientation de la plate-forme est obtenue en spécifiant les valeurs de z , ϕ et θ .

Problème géométrique inverse

La résolution du PGI va permettre de trouver les angles θ_1 à θ_4 au niveau de la base qui correspondent à une certaine position et orientation de la plate-forme. Pour le manipulateur présenté, on se rend compte qu'il s'agit de résoudre les PGI de quatre mécanismes plans à 2 degrés de liberté chacun où A_i et C_i sont connus. Toutefois, pour localiser C_4 , il faut calculer l'angle β puisque le positionnement de la partie passive dépend seulement de l'emplacement des points A_3 , B_3 et C_3 .

Équations de vitesse et d'accélération

Soit le vecteur $\mathbf{v}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i$ avec les vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{u}_i partant respectivement de O à A_i et de A_i à B_i . En dérivant par rapport au temps les équations associées au PGI, on obtient la relation suivante où $\mathbf{t} = [\dot{\mathbf{p}}^T, \boldsymbol{\omega}^T]^T$

$$\mathbf{A} \mathbf{t} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [(\mathbf{Q} \mathbf{c}_1 |_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{v}_1]^T \\ [(\mathbf{Q} \mathbf{c}_2 |_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{v}_2]^T \\ [(\mathbf{Q} \mathbf{c}_3 |_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{v}_3]^T \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}[(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{E}_i \mathbf{u}_i] \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

La matrice \mathbf{A} est de dimension 3×6 . Puisque les trois moteurs en A_1 , A_2 et A_3 servent à contrôler z , ϕ et θ au niveau de la plate-forme, on doit reformuler les expressions en ajoutant les contraintes de mouvement du mécanisme. En établissant la relation entre les vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega}$ et les vitesses des angles d'Euler, on trouve une relation du type

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \quad (5)$$

où

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

De plus, en considérant les contraintes du manipulateur, on obtient que

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T = \mathbf{R}[\dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}]^T = \mathbf{R}\dot{\epsilon} \quad (7)$$

avec

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_{13} \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\cos^2 \psi \sin \theta}{\cos^2 \phi} & -\cos^2 \psi \cos \theta \tan \phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ainsi, l'équation 2 reformulée devient

$$\mathbf{ASR}\dot{\epsilon} = \mathbf{B}\dot{\theta} \quad (9)$$

Pour obtenir les accélérations articulaires des moteurs, il suffit de dériver par rapport au temps l'équation 9, ce qui nous donne

$$\ddot{\theta} = \mathbf{B}^{-1} \{ [(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{S} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{S}})\mathbf{R} + \mathbf{AS}\dot{\mathbf{R}}]\dot{\epsilon} + \mathbf{ASR}\ddot{\epsilon} - \dot{\mathbf{B}}\dot{\theta} \} \quad (10)$$

Il faut toutefois souligner que pour la partie passive du manipulateur, qui n'intervient pas au niveau des matrices jacobiniennes précédentes, $\dot{\theta}_4$ et $\ddot{\theta}_4$ doivent être calculées de façon indépendante une fois que la vitesse et l'accélération de B_3 , C_3 et β sont connues (même situation que pour le PGI).

2. Dynamique

En connaissant la position, la vitesse et l'accélération de chaque articulation ainsi que les forces (\mathbf{f}_k) et les moments (\mathbf{m}_k) exercés au centre de masse de chaque corps k du manipulateur, il est possible de calculer les couples requis aux moteurs afin d'effectuer une trajectoire prescrite en O' . Pour obtenir ces couples, deux différentes méthodes menant aux mêmes résultats ont été utilisées : une première méthode basée sur le principe du travail virtuel et une seconde utilisant l'approche classique de Newton-Euler.

Principe du travail virtuel

Cette méthode [1] consiste à calculer le couple (τ^j) que doit produire le moteur j en lui prescrivant un déplacement virtuel angulaire unitaire ($\delta\theta_j^j = 1$) et en évaluant les déplacements virtuels linéaires ($\delta\mathbf{q}_k^j$) et angulaires ($\delta\varphi_k^j$), du centre de masse de chaque corps k , engendrés par ce

déplacement virtuel. Ainsi, il suffit d'obtenir τ^j à l'aide de la relation suivante

$$\tau^j \delta\theta_j^j + \sum_{k=1}^9 (\mathbf{f}_k^T \delta\mathbf{q}_k^j + \mathbf{m}_k^T \delta\varphi_k^j) = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

Newton-Euler

L'approche de Newton-Euler [2] consiste à établir le DCL de chaque corps du manipulateur où toutes les forces et les moments à chacune des articulations du mécanisme sont des inconnues à solutionner. Or, le manipulateur présenté sur la figure 1 possède 9 corps et, avec 6 équations par corps, 54 équations sont générées. Toutefois, pour avoir un système linéaire à 54 inconnues, il faut considérer les articulations en C_1 , C_2 et C_4 comme des articulations sphériques et considérer l'articulation B_3 comme un cardan en lui ajoutant une liaison rotoïde dans l'axe de la membrure A_3B_3 . De cette façon, une fois le système de 54 équations à 54 inconnues résolu, il s'agit seulement de localiser les variables qui correspondent aux couples recherchés à l'intérieur du vecteur solution.

Bilan d'énergie

Afin de vérifier la validité des couples trouvés avec le principe du travail virtuel ou Newton-Euler, effectuer un bilan d'énergie s'avère une excellente méthode puisque tous les éléments nécessaires pour effectuer cette vérification ont déjà été calculés précédemment. Donc, par conservation d'énergie, la somme de la variation d'énergie cinétique et de la variation d'énergie potentielle doit évaluer au travail effectué par les moteurs.

3. Conclusion

Une nouvelle architecture pour un manipulateur parallèle spatial à 3 degrés de liberté a été proposée dans cet article. L'analyse de ce manipulateur a permis de solutionner le problème géométrique inverse ainsi que d'établir les matrices jacobiniennes. De plus, pour calculer les couples aux moteurs, deux approches menant aux mêmes résultats ont été présentées : le principe du travail virtuel et Newton-Euler.

Références

- [1] WANG, J. et GOSSELIN, C., 1998, "A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulators", *Multibody System Dynamics*, Vol 2., No. 3, pp. 317–334.
- [2] GOSSELIN, C., 1996, "Parallel computational algorithms for the kinematics and dynamics of planar and spatial parallel manipulators", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 118, No. 1, pp. 22–28.