Équilibrage statique d'un mécanisme parallèle sphérique à trois degrés de liberté

Jean-François Levesque   *Clément M. Gosselin*

Département de Génie Mécanique, Université Laval, Québec, Québec, Canada, G1K 7P4

Résumé

L'équilibrage statique de mécanismes parallèles sphériques à trois degrés de liberté (ddl) est traité dans cette communication. L'équilibrage statique est défini comme un ensemble de conditions qui, une fois satisfaites, assurent que le poids d'un mécanisme ne produit aucun couple (ou force) à ses actionneurs pour toute configuration sous des conditions statiques. En premier lieu, nous étudierons les équations permettant d'équilibrer avec des ressorts un corps monté sur une rotule et nous verrons ensuite un bref exemple pour le cas où le système compte trois ressorts.

1. Introduction

Dans un monde où les mécanismes parallèles sont de plus en plus utilisés, il est important d'introduire la notion d'équilibrage statique [1, 2, 3, 4, 5]. Les mécanismes parallèles existants possèdent des actionneurs puissants non seulement pour déplacer des charges mais aussi pour supporter leur propre poids. Cela mène à un surdimensionnement des moteurs et à une moins grande efficacité. Il est donc important d'équilibrer les mécanismes parallèles pour améliorer le design et réduire les effets de l'usure et des vibrations.

La méthode d'équilibrage par éléments élastiques linéaires (ressorts) est particulièrement intéressante puisqu'elle ajoute très peu de poids et d'inertie au système.

Nous parlerons ici des paramètres d'équilibre d'un mécanisme parallèle sphérique à trois ddl pour un nombre indéterminé de ressorts puis nous appliquerons ces résultats pour trois ressorts.

2. Équilibrage statique avec n ressorts

On dit qu'un mécanisme est équilibré statiquement quand les forces (ou couples) aux actionneurs sont nuls pour toute configuration statique du mécanisme. On peut aussi dire, dans le cas où des ressorts sont utilisés, que l'énergie potentielle globale du système doit être constante pour toute configuration. De cette dernière condition, on peut établir des équations d'équilibre suivant certaines spécifications.

Soit un corps rigide monté sur une rotule à trois ddl située à l'origine en O (Figure1). La position du centre de masse est définit par le vecteur $\mathbf{r}$ et la masse du corps est notée m. Les n ressorts sont attachés à une base fixe aux points A_i et au corps aux points B_i par des rotules. On note g l'accélération gravitationelle qui agit dans le sens négatif de l'axe z et k_i la raideur du i ième ressort.

En partant de l'expression de l'énergie potentielle du système, on peut dériver celle-ci par rapport à la matrice de rotation $\mathbf{Q}$, qui représente l'orientation du repère mobile $\Re'$ par rapport au repère fixe $\Re$, pour s'assurer que l'énergie

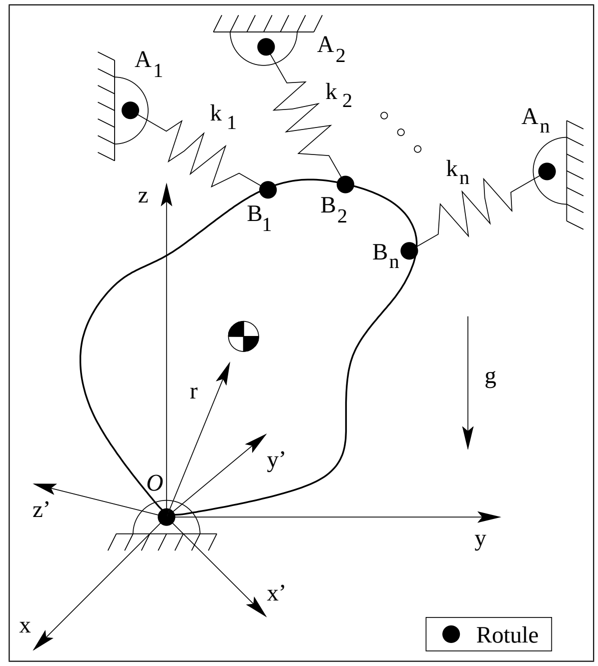

FIG. 1 – Un mécanisme sphérique à trois ddl avec n ressorts.

potentielle reste contante pour toute position. Nous pouvons donc récrire après différentiation et transformations [3]

$$mg\mathbf{r} - \sum_{i=1}^{n} k_i a_{iz} \mathbf{b_i} = \mathbf{0_3} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_{ix} \mathbf{b_i} = \mathbf{0_3} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_{iy} \mathbf{b_i} = \mathbf{0_3} \quad (3)$$

où $\mathbf{a}_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T$ représente le vecteur du point O au point A_i, $\mathbf{b}_i = [b_{ix}, b_{iy}, b_{iz}]^T$ représente le vecteur du point O au point B_i et $\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]$ défini la position du centre de masse. On doit aussi spécifier que, pour certaines raisons [1, 2], la longueur non déformée des ressorts doit être nulle pour que l'équilibrage soit réalisable.

Il est possible de manipuler et de transformer ces équations pour obtenir des expressions en fonction des vecteurs $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{b}_i$ qui permettent l'équilibrage statique du corps libre. Il a déjà été établi [3] que l'équilibrage statique pouvait être fait avec un nombre n de ressorts si certaines conditions étaient respectées.

3. Contrainte d'équilibrage

Comme nous venons de le dire, il est possible d'équilibrer statiquement un corps libre monté sur une rotule à l'aide d'un nombre n de ressorts où $n \geq 1$ [3]. Cependant, un faible nombre de ressorts restreint grandement la position des points d'attache. Par exemple, pour un seul ressort, le point d'attache sur le corps doit obligatoirement se situer sur l'axe vertical traversé par le centre de masse. Le point d'attache sur la base fixe, quant à lui, doit être en ligne avec la verticale passant par le centre de masse et l'origine O. À l'inverse, il devient complexe et redondant dans plusieurs situations d'utiliser beaucoup d'éléments élastiques en raison du grand nombre de paramètres, du chevauchement des forces et de l'interférence physique possible entre les éléments. Il faut aussi prendre note que l'équilibrage n'est valide que pour une seule direction et grandeur de l'accélération gravitationnelle. Cette contrainte n'est cependant pas un problème dans la majorité des applications.
Nous allons ici parler plus précisément des équations et des contraintes pour trois ressorts ($n = 3$).

Équilibrage avec trois ressorts

Les équations (1)-(3) peuvent être écrites sous la forme

$$\mathbf{\Lambda h} = \mathbf{d} \tag{4}$$

où $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{h}$ sont définis comme

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} k_1 a_{1x}\mathbf{1} & k_2 a_{2x}\mathbf{1} & k_3 a_{3x}\mathbf{1} \\ k_1 a_{1y}\mathbf{1} & k_2 a_{2y}\mathbf{1} & k_3 a_{3y}\mathbf{1} \\ k_1 a_{1z}\mathbf{1} & k_2 a_{2z}\mathbf{1} & k_3 a_{3z}\mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T & \mathbf{b}_3^T \end{bmatrix}, \tag{6}$$

où $\mathbf{1}$ est une matrice identité 3×3 et où $\mathbf{d}$ est un vecteur de 9 composantes défini comme $\mathbf{d} = [\mathbf{0}_3^T, \mathbf{0}_3^T, mg\mathbf{r}^T]$ où $\mathbf{0}_3$ est un vecteur nul tridimensionnel. On peut solutionner l'éq.(4) et obtenir une expression des vecteurs $\mathbf{b}_i$ en fonction des autres paramètres :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \frac{mg}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \begin{bmatrix} \left(\frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3}{k_1}\right) \mathbf{r} \\ \left(\frac{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3}{k_2}\right) \mathbf{r} \\ \left(\frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3}{k_3}\right) \mathbf{r} \end{bmatrix} \tag{7}$$

où $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$. On peut tout de suite remarquer que les vecteurs $\mathbf{a}_i$ ne doivent pas être coplanaires pour que l'équilibrage soit atteint puisque les ressorts ne pourraient pas produire de forces perpendiculaires au plan les contenant. De même, le centre de masse ne doit pas être situé à l'origine, puisqu'il s'agit d'une solution triviale.
Il est possible par la suite de fixer des conditions et d'optimiser les équations pour que la force des ressorts soient minimisée ou que ceux-ci se situent tous dans la partie négative de l'axe z. Un exemple de corps équilibré avec trois ressorts est illustré schématiquement à la Figure 2.

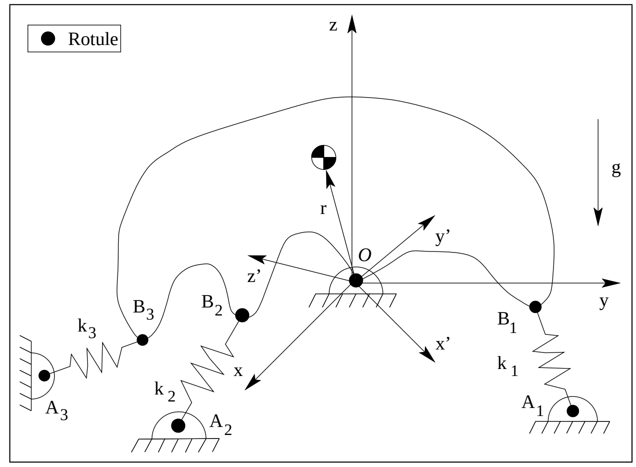

FIG. 2 – Un mécanisme sphérique à trois ddl avec trois ressorts ($n = 3$).

4. Conclusion

Nous avons vu dans cette communication que l'équilibrage statique d'un mécanisme parallèle sphérique à 3 ddl pouvait, grâce à un ensemble de conditions, être accompli avec un nombre n de ressorts. Le cas plus précis où $n = 3$ a aussi été étudié brièvement. Cette méthode d'équilibrage qui peut facilement être appliquée à d'autres mécanismes sphériques a beaucoup d'applications dans le domaine de la mécanique. La conception d'un prototype, qui est déjà en cours, permettra de valider les présents travaux et de traiter les différents aspects pratiques.

5. Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) pour le support financier accordé à ce projet.

Références

[1] D.A. Streit et B.J. Gilmore : "Perfect spring equilibrators for rotatable bodies", *ASME J. Mech. Trans. Automat. Design* 111(4) :451-458 (1989).

[2] M. Jean et C. Gosselin : "Static balancing of planar parallel manipulators", *Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Robot. and Automat., vol. 4,* Washington DC, pp. 3732-3737 (1996).

[3] C. Gosselin : "Static balancing of spherical 3-DOF parallel mechanisms and manipulators", *The international Journal of Robotics Research, vol. 18, No. 7,* (1999).

[4] C. Gosselin et J. Wang : "On the design of gravity-compensated six-degree-of-freedom parallel mechanims", *Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Robot. and Automat.*, Leuven, Belgium, (may 1998).

[5] G.J. Walsh, D.A. Streit et B.J. Gilmore : "Spatial spring equilibrator theory", *Mech. Mach. theory, vol. 26, No. 2,* pp. 155-170 (1991).