

FRONTIÈRES D'ÉQUILIBRE DE MÉCANISMES À CÂBLES COMPRENANT DES LIENS PASSIFS

GABRIEL CÔTÉ ET CLÉMENT M. GOSSELIN[†]

*Laboratoire de Robotique,
Département de Génie mécanique,
Université Laval,
Québec, Canada*

[†] *Pour la correspondance gosselin@gmc.ulaval.ca*

Résumé

L'étude de l'espace atteignable des manipulateurs à câbles passe nécessairement par l'étude des frontières de singularité et des frontières propres à l'unilatéralité d'actionnement des câbles. Ces dernières sont appelées frontières d'équilibre et sont étudiées dans le cas de mécanismes à câbles plans et spatiaux généraux comprenant les liens passifs suivants : ressorts et câbles à tension constante.

The dynamic workspace of a cable-actuated mechanism is limited by either singularity loci or equilibrium loci. These are related to the unilateral nature of the cables and are investigated for planar and spatial cable-actuated mechanisms including the following passive links : springs and constant tension cables.

1 Introduction

Les études des mécanismes sériels et parallèles sont abondantes. Parmi les mécanismes parallèles, les mécanismes à câbles ont démontré des avantages indéniables dans de multiples applications (comme par exemple la caméra à grands débattements *Skycam* [5], le robot ultra-rapide *Falcon* [6], un mécanisme pour tunnel d'essais aérodynamiques [7]). Pourtant, les études analytiques des frontières de l'espace atteignable des mécanismes à câbles sont encore peu nombreuses. On note

dans la littérature des études d'espaces atteignables et de design nouvelles intéressantes. Fattah [8] a proposé une méthode de design basée sur le calcul de l'espace de travail basé sur l'identification des conditions de tension dans les forces. Tatsuo [9] a investigué le design de manipulateurs à câbles hybrides avec liens rigides. Ces dernières études ont montré des résultats intéressants, mais elles ne concernent pas la description analytique des frontières de l'espace atteignable des mécanismes à câbles. Aussi, dans un ordre plus fondamental, l'étude des équations analytiques des frontières de ce type de mécanisme est pertinente. Barrette [3] a établi les équations des frontières d'équilibre des mécanismes à câbles. Il a traité les mécanismes à câbles plans à 3 ddl pouvant comprendre des liens passifs de type ressorts à longueur libre nulle, ainsi que les mécanismes spatiaux à 6 ddl sans liens passifs.

Pour contrôler pleinement N degré de liberté, il est convenu qu'un mécanisme à câbles doit avoir $N + 1$ câbles. Par simplicité de contrôle, il peut être utile d'éviter la redondance d'actionnement. Pour ce faire, il faut donc ajouter les contraintes dues au fait que les câbles doivent rester en tension.

L'utilisation de liens passifs est pertinente dans la mesure où elle peut permettre de compenser en partie certaines contraintes dues à l'unilatéralité d'actionnement. On constate, par exemple, qu'une plate-forme suspendue par des câbles ne peut accélérer vers le bas à plus de $9.81m/s^2$. Aussi, on constate que l'ajout d'un ressort peut permettre d'augmenter cette accélération.

Dans ce contexte, on propose ici une étude des frontières de l'espace atteignable de mécanismes plans à 2 et à 3 ddl ainsi que de mécanismes spatiaux à 3 et 6 ddl pouvant comprendre des liens passifs de type ressorts à longueur libre arbitraire et câbles à tension constante. Le type de lien passif ressort est analysé car il s'agit d'un lien passif bien connu, et le type de lien passif câble à tension constante est considéré car il permet des débattements à priori supérieurs à ceux d'un ressort et reste un lien passif simple.

2 Interprétation géométrique de l'espace de travail dynamique

Pour comprendre le concept des frontières de l'espace de travail dynamique de mécanismes à câbles, on illustre d'abord le cas simple d'un mécanisme plan à 2 degrés de liberté (ddl) en positionnement. Pour un tel mécanisme général, pouvant comprendre un nombre de câbles plus élevé que 2, les frontières sont les suivantes :

- Les lieux d'équilibre à 1 câble correspondant à chaque câble.
- Les lieux de singularité pour chacune des combinaisons de 2 câbles.

La figure 1(a) illustre un mécanisme composé de deux câbles. Les vecteurs \mathbf{w}_i indiquant les forces produites par les câbles actionnés i dans l'espace Cartésien des forces. Le vecteur \mathbf{h} indique la condition dynamique que l'on veut obtenir à l'effecteur, dans le même espace des forces. Pour cet exemple, considérons une masse m à l'effecteur. Il est possible de maintenir un équilibre statique si $\mathbf{h} = (-mg, 0)$ est possible pour une position de l'effecteur donnée. Ainsi, l'espace atteignable correspondant à la condition dynamique statique est limité par deux choses :

- Les frontières d'équilibre des câbles 1 et 2 : des droites verticales passant respectivement par $P1$ et $P2$. Ces frontières d'équilibre sont fonction des conditions dynamiques voulues.
- La frontière de singularité : une droite horizontale passant par $P1$ et $P2$. Cette frontière est indépendante de la condition dynamique voulue. Elle est reliée à la cinématique.

De façon générale, pour qu'une condition appartienne à l'espace atteignable dynamique, \mathbf{h} doit se trouver à l'intérieur d'au moins un des triangles formés par une combinaison de 2 vecteurs \mathbf{w}_i (figure 1(a)). Ainsi, l'espace atteignable dynamique (associé à une condition dynamique voulue) est soit limité par une frontière de singularité soit par une frontière d'équilibre. Aussi, pour un mécanisme redondant, l'espace de travail est formé de l'union des sous-espaces de travail des combinaisons de 2 câbles.

Dans le cas de mécanismes à 3 ddl plans ou spatiaux, le concept d'espace de travail dynamique est le même mais il s'agit de vecteurs \mathbf{w}_i et \mathbf{h} à trois composantes. Avec 3 ddl, pour qu'une condition appartienne à l'espace atteignable dynamique, \mathbf{h} doit se trouver à l'intérieur d'au moins une des pyramides formées par une combinaison de 3 vecteurs \mathbf{w}_i . L'interprétation géométrique de l'espace de travail dans le cas de mécanismes à 2 et 3 ddl plans est illustré à la figure 1. Le même concept est valide pour des mécanismes spatiaux à 3 et 6 ddl. Dans le cas à 6 ddl, le vecteur à six dimensions \mathbf{h} doit être dans une hyper-pyramide de six vecteurs \mathbf{w}_i .

Les frontières de singularité sont atteintes quand une hyper-pyramide (6 ddl), une pyramide (cas 3 ddl) ou un triangle (cas 2 ddl) s'effondre. Celles-ci sont les mêmes avec un mécanisme à câbles qu'avec un mécanisme à vérins conventionnel. Elles sont d'ailleurs abondamment documentées [1, 2]. Pour un mécanisme à N ddl, les frontières d'équilibre sont rencontrées quand $N - 1$ câbles suffisent à produire à l'effecteur la condition dynamique voulue. Ce type de frontière est relié à

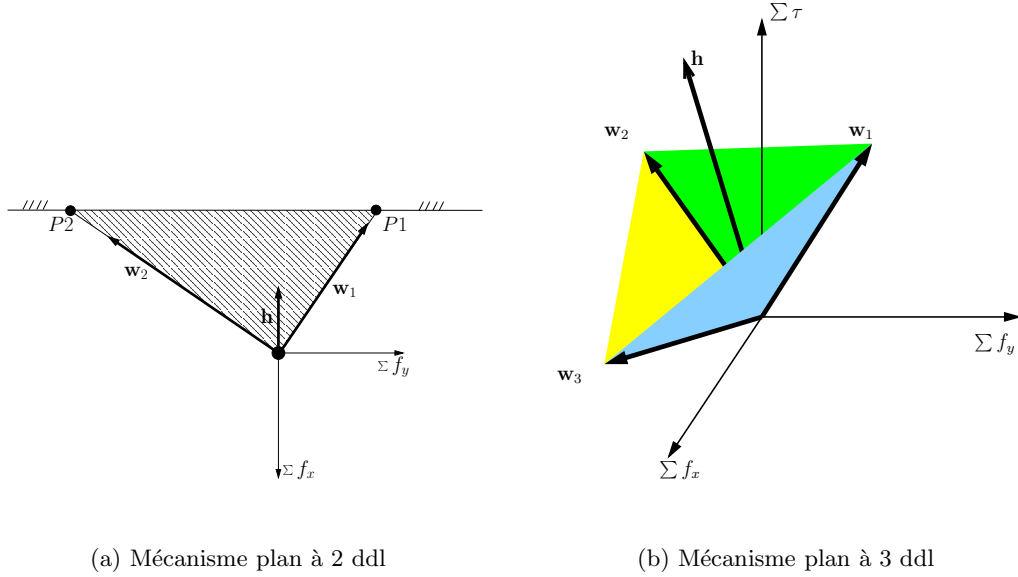


FIG. 1 – Représentation de l’espace de travail dynamique pour des mécanismes plans.

la nature des câbles et a été traité [3, 4]. Une approche différente est cependant utilisée ici pour étudier les frontières d’équilibre des mécanismes à câbles généraux comprenant des liens passifs comme des ressorts à longueur libre arbitraire et des câbles à tension constante. Comme il a été mentionné, pour un mécanisme redondant à N ddl, l’espace atteignable est la somme des sous-espaces pour chaque combinaison de N câbles. Aussi, pour chacune de ses combinaisons, il existe autant de frontières d’équilibre potentielles que de combinaisons de $N - 1$ câbles. Ainsi, dans les sections subséquentes, les frontières sont décrites pour $N - 1$ câbles étant donné que la démarche est la même pour chacune des combinaisons de $N - 1$ câbles. Pour tous les types de mécanismes traités, la démarche menant aux relations vectorielles décrivant les lieux d’équilibre fait abstraction des caractéristiques dynamiques de l’effecteur. On considère des conditions dynamiques à obtenir données par le vecteur \mathbf{h} . Cette abstraction est justifiée car ces conditions dynamiques voulues sont directement fonction des accélérations désirées et des caractéristiques (inertie et masse) de l’effecteur.

3 Les mécanismes plans

Soit la notation illustrée à la figure 2. Pour le cas 2 ddl, on considère $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ et on ne tient pas compte de ϕ .

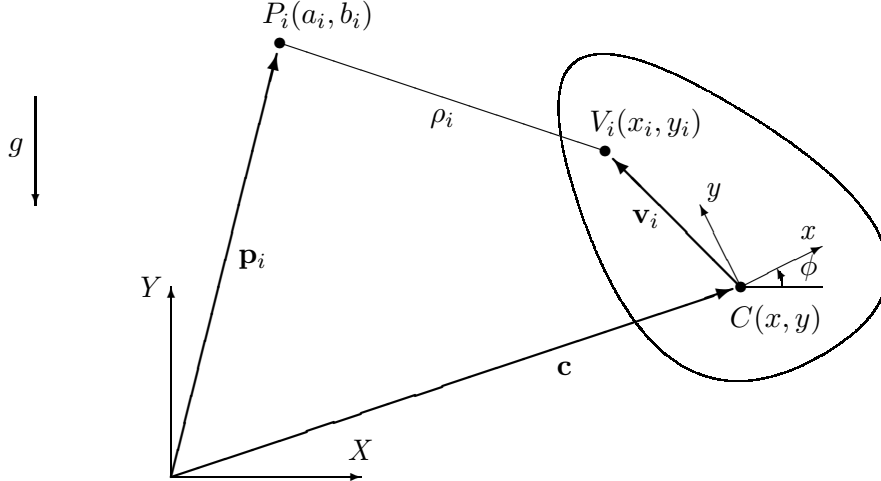


FIG. 2 – Notation pour la liaison i d'un mécanisme à câbles plan.

3.1 Mécanisme plan à 2 ddl

Les frontières d'équilibre d'un mécanisme plan à 2 ddl sont atteintes quand un seul câble suffit à produire les conditions dynamiques voulues à l'effecteur. L'orientation et la direction du vecteur des forces produites par le câble actionné μ sont données par $\mathbf{w}_\mu = (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c})$. Soit une condition dynamique à l'effecteur voulue donnée par $\mathbf{h} = (F_x, F_y)$, et une condition dynamique à produire par les câbles actionnés \mathbf{h}_e . La relation décrivant les conditions où il y a équilibre à un câble est donc donnée par :

$$(\mathbf{w}_\mu)^T \mathbf{E} \mathbf{h}_e = 0 \quad (1)$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans le cas où il n'y a pas de liens passifs, $\mathbf{h}_e = \mathbf{h}$ et il est évident que la frontière d'équilibre reliée au câble μ est une droite parallèle à \mathbf{h} et passant par P_μ . Pour un mécanisme à câbles, il peut être intéressant d'utiliser des liens passifs pour permettre des conditions dynamiques spécifiques tout en évitant la redondance d'actionnement. Aussi, pour de tels mécanismes $\mathbf{h}_e \neq \mathbf{h}$. Le ressort est d'abord considéré comme lien passif. Soit un mécanisme ayant m liens passifs du type ressorts de longueur libre l_k et de constante de rappel K_k reliées au points d'attache P_k et induisant une force orientée selon $\mathbf{w}_k = (\mathbf{p}_k - \mathbf{c})$. La longueur du câble passif k étant donnée par $\rho_k = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{c}\|$,

la relation d'équilibre avec le câble μ est celle définie par l'équation (1) avec cependant :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m K_k \left(\frac{\rho_k - l_k}{\rho_k} \right) \mathbf{w}_k \quad (2)$$

Dans le cas de mécanismes avec des ressorts à longueurs libres nulles, il est possible de montrer que les frontières d'équilibre restent des droites, peu importe le nombre de liens passifs.

Avec des ressorts de longueur libre arbitraire, les courbes sont équivalentes à des polynômes dont le degré est fonction du nombre de liens passifs.

Soit maintenant m liens passifs à tension F_k constante. On a la même relation donnée par l'équation (1) avec cette fois :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m \frac{F_k \mathbf{w}_k}{\rho_k} \quad (3)$$

Ces frontières sont aussi équivalentes à des polynômes dont le degré est fonction du nombre de liens passifs.

3.2 Mécanisme plan à 3 ddl

Pour les mécanismes à 3 ddl, tel qu'il est observé sur la figure 1(b), les câbles μ et ν sont en équilibre lorsqu'à eux seuls ils peuvent produire les conditions dynamiques voulues à l'effecteur. Pour cette section la matrice de rotation \mathbf{Q} exprime l'orientation de l'effecteur fonction de l'angle ϕ . L'orientation et la direction du vecteur des forces produites par le câble actionné ou passif i sont données par : $\mathbf{w}_i = (f_x, f_y, f_\tau)^T$ avec :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} &= \mathbf{p}_i - \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{v}_i \\ f_\tau &= -(\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Donc, l'équilibre à deux câbles correspond aux configurations où \mathbf{h} est coplanaire au plan formé par une paire de câbles μ et ν . Aussi, la coplanarité entre trois vecteurs correspond au moment où le produit triple entre ces vecteurs est nul.

Soit une condition dynamique à l'effecteur voulue donnée par $\mathbf{h} = (F_x, F_y, \tau)$ et une condition dynamique à produire par les câbles actionnés \mathbf{h}_e . La relation décrivant les conditions où il y a un équilibre à 2 câbles est donnée par :

$$(\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu)^T \mathbf{h}_e = 0 \quad (5)$$

De façon similaire au cas 2 ddl, dans le cas où il n'y a pas de liens passifs, $\mathbf{h}_e = \mathbf{h}$. Aussi, il est possible de montrer que les courbes d'équilibre sont dans ce cas des quadratiques. Pour des mécanismes comprenant des liens passifs, il est clair que $\mathbf{h}_e \neq \mathbf{h}$. Le cas de mécanismes ayant m ressorts de longueur libre l_k et de constante de rappel K_k reliés au points d'attache P_k , induisant une force selon \mathbf{w}_k est considéré. La norme du câble passif k est alors $\rho_k = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{v}_k\|$. La relation d'équilibre des deux câbles μ et ν s'exprime avec :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k \left(\frac{\rho_k - l_k}{\rho_k} \right) \mathbf{w}_k \quad (6)$$

Dans le cas d'un mécanisme comprenant des ressorts à longueur libre nulle, la relation se simplifie et les relations résultantes sont des quadratiques indifféremment du nombre de liens passifs. Dans le cas de ressorts à longueur libre arbitraire, ces courbes sont équivalentes à des polynômes dont le degré est fonction du nombre de liens passifs.

En considérant m liens passifs à tension F_k constante, on obtient :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m \frac{F_k \mathbf{w}_k}{\rho_k} \quad (7)$$

Ces frontières sont aussi équivalentes à des polynômes dont le degré est fonction du nombre de liens passifs.

4 Les mécanismes spatiaux

Soit la notation illustrée à la figure 3. Pour le cas 3 ddl, on considère $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ et on ne tient pas compte de \mathbf{Q} .

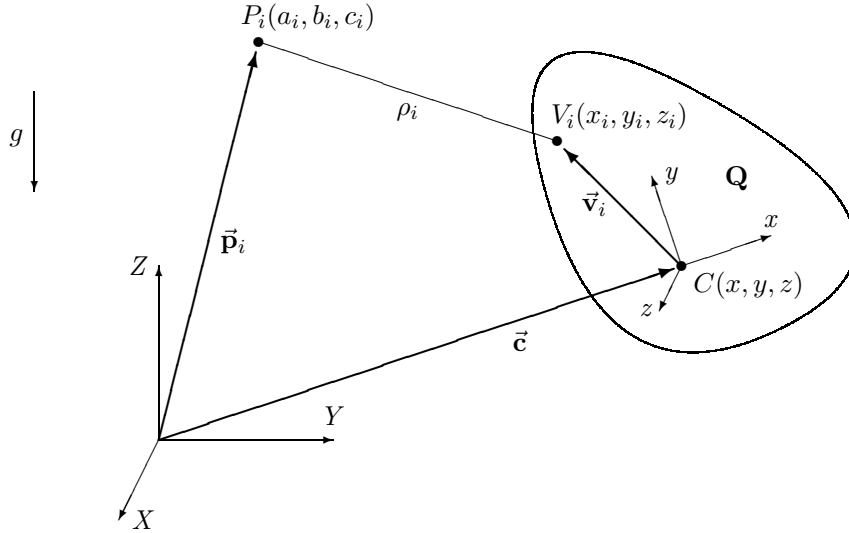


FIG. 3 – Notation pour la liaison i d'un mécanisme spatial.

4.1 Mécanismes à 3 ddl

Pour ce type de mécanisme, il est possible de représenter l'espace atteignable géométriquement de façon très similaire aux mécanismes plan à 3 ddl. Pour un triplet de câbles, on a en effet une pyramide formée par les \mathbf{w}_i des trois câbles actionnés dans l'espace des forces Cartésiennes f_x , f_y et f_z cette fois. Avec, pour le câble actionné ou passif i , $\mathbf{w}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{c}$ définis dans l'espace tridimensionnel, les lieux d'équilibre se décrivent avec les mêmes relations qu'à la section 3.2 (équations 5 à 7). Pour ce type de mécanismes sans lien passif ou avec des ressorts à longueur libre nulle, les frontières d'équilibre à deux câbles sont des plans. Pour les mécanismes comprenant d'autres types de liens passifs, il s'agit de polynômes dont le degré est fonction du nombre de liens passifs.

4.2 Mécanismes à 6 ddl

Pour un mécanisme à câbles spatial à 6 ddl, les frontières d'équilibre correspondent à des lieux d'équilibre à 5 câbles. Cependant, dans ce cas, il est impossible de représenter les frontières d'équilibre par une pyramide tridimensionnelle. Comme cela a été expliqué précédemment, les frontières d'équilibre peuvent être visualisées dans l'espace des forces et moments induits par les câbles en six dimensions. Aussi, l'approche utilisée pour définir les équations des lieux d'équilibre à 5 câbles est la même que celle utilisée pour les mécanisme à trois degrés de liberté.

Tout comme dans les cas 3 ddl, les configurations dans lesquelles l'effecteur est en équilibre à 5 câbles peuvent être exprimées de façon vectorielle. Dans le cas d'équilibre à 5 câbles, ces configurations arrivent quand le vecteur des forces que doivent produire les câbles \mathbf{h}_e est orthogonal à l'hyperplan formé par les 5 vecteurs \mathbf{w}_i (correspondant au système de forces que peuvent induire les câbles). Dans ce cas, l'équivalent du produit vectoriel tridimensionnel est utilisé pour produire un vecteur orthogonal aux 5 vecteurs définissant l'hyperplan. Ensuite, la coplanarité entre le vecteur \mathbf{h}_e et l'hyperplan correspond au moment où le produit scalaire du vecteur orthogonal à l'hyperplan avec ce vecteur est nul.

En trois dimensions, le produit vectoriel entre deux vecteurs permet d'obtenir un vecteur perpendiculaire(orthogonal). En N dimensions, l'équivalent se fait avec $N - 1$ vecteurs par le pseudo-tenseur Levi-Civita $\epsilon_{i,j,\dots,N}$ d'ordre N . Dans le cas 6 ddl, le pseudo-tenseur ϵ_{ijklmn} se définit comme suit :

$$\epsilon_{ijklmn} = \begin{cases} 0 & \text{si deux des indices sont égaux;} \\ 1 & \text{si } ijklmn \text{ est une permutation paire de } 1, 2, 3, 4, 5, 6; \\ -1 & \text{si } ijklmn \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Par une sommation avec le tenseur Levi-Civita sur cinq vecteurs, on obtient un vecteur indépendant à ceux-ci. Soit l'espace en six dimensions des forces et des moments ayant comme base les vecteurs unitaires selon $(f_x, f_y, f_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z)$ que l'on définit comme étant $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6)$. De plus, soit le scalaire w_{ij} étant la composante j du vecteur \mathbf{w}_i . Alors, un opérateur sur cinq vecteurs en six dimensions (\times^ϵ) produit un vecteur \mathbf{n}_p orthogonal aux cinq autres comme suit :

$$\mathbf{n}_p = \times_{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}^\epsilon = \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^6 w_{1i} w_{2j} w_{3k} w_{4l} w_{5m} \epsilon_{ijklmn} \mathbf{e}_n \quad (8)$$

Dans l'espace Cartésien des forces, on définit les composantes \mathbf{w}_i du vecteur définissant la direction et l'orientation des efforts Cartésiens que produit le câble i (actif ou passif) à l'effecteur :

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i - \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{v}_i \\ (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i) \times \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Soit les forces à induire à l'effecteur \mathbf{h} et les forces à induire par les câbles actionnés \mathbf{h}_e pour l'équilibre à 5 câbles. Les lieux d'équilibre à cinq câbles sont alors donnés par :

$$(\times_{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}^\epsilon)^T \mathbf{h}_e = 0 \quad (10)$$

Dans le cas où il n'y a pas de liaison passive, $\mathbf{h}_e = \mathbf{h}$. Avec m ressorts à longueur libre arbitraire l_k dont la constante de raideur est K_k . Sachant que la norme du câble passif k est $\rho_k = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{v}_k\|$, la relation donnant les lieux d'équilibre est : donnée par (10) avec :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m K_k \left(\frac{\rho_k - l_k}{\rho_k} \right) \mathbf{w}_k \quad (11)$$

Aussi, de façon similaire on exprime la relation d'équilibre dans le cas de mécanismes ayant m liens passifs à tension constante F_k :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m \frac{F_k}{\rho_k} \mathbf{w}_k \quad (12)$$

Pour des mécanismes à câbles sans lien passif ou avec des ressorts de longueur libre nulle, les relations d'équilibre obtenues sont des cubiques, tel que l'a montré Barrette [4]. Pour les mécanismes avec d'autres types de liens passifs, il s'agit de courbes dont le degré est fonction du nombre de liens passifs.

5 Exemple de frontière d'équilibre

Les équations développées précédemment sont maintenant utilisées pour tracer des courbes d'équilibre pour quelques exemples plans et spatiaux. La démarche présentée pour trouver les relations définissant les lieux d'équilibre fait abstraction des conditions dynamiques (masse et inertie) de l'effecteur. Aussi, pour les exemples, des caractéristiques sont choisies. Pour simplifier la notation, dans le cas plan comme dans le cas spatial, on considère que le centre de masse de l'effecteur est à l'origine du repère mobile.

Soit, pour les mécanismes plans, une inertie I et une masse m . Pour des accélérations Cartésiennes données par $\ddot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} a_x & a_y \end{bmatrix}$ et une accélération angulaire $\ddot{\phi}$. On a alors :

$$\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} F_x & F_y & \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T & I\ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Dans le cas spatial, avec la même notation et en considérant une matrice d'inertie \mathbf{I} , le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, le vecteur accélération angulaire $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ et le vecteur accélération angulaire $\ddot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$ on a :

$$\text{Cas 3 ddl : } \mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T \quad (14)$$

$$\text{Cas 6 ddl : } \mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z & \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T & (\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})^T \end{bmatrix} \quad (15)$$

Dans les expressions (13), (14) et (15), \mathbf{g} désigne l'accélération gravitationnelle terrestre.

5.1 Mécanisme à 3 ddl plan

Un exemple de courbes d'équilibre pour un mécanisme à câbles plan à 3 ddl est tracé. Il s'agit d'un mécanisme comprenant trois liens passifs de type ressort. L'architecture et les conditions dynamiques sont illustrées au tableau 1.

<i>Architecture</i>			
	\mathbf{p}_i	\mathbf{v}_i	Longueur libre
Câble actionné 1	(0, 0)	(0.1, 0)	
Câble actionné 2	(-1, -0.5)	(-0.1, 0)	
Ressort 1 (0.5 N/m)	(-1, 0)	(-0.1, 0)	0.2 m
Ressort 2 (5 N/m)	(-0.5, -0.5)	(-0.1, 0)	0.1 m
Ressort 3 (10 N/m)	(0.5, -0.5)	(0.1, 0)	0.15 m
<i>Conditions dynamiques</i>			
Masse effecteur	1 kg		
Inertie effecteur	1 kgm ²		
Cas statique	nulles		
Cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 2m/s^2, \dot{\phi} = 1rad/s^2$		
Orientation	20 degrés		

TAB. 1 – Architecture d'un mécanisme plan à 3 ddl (voir figure 4).

A la figure 4, les points d'attache entourés d'un cercle représentent les ressorts et leur longueur libre respective. Les cercles représentent donc aussi des zones à l'intérieure desquelles les équations d'équilibre ne sont plus représentatives. En effet, il ne peut y avoir d'équilibre à ces endroits car lors de la compression le positionnement du ressort devient indéterminé. Tel qu'il a été mentionné à la

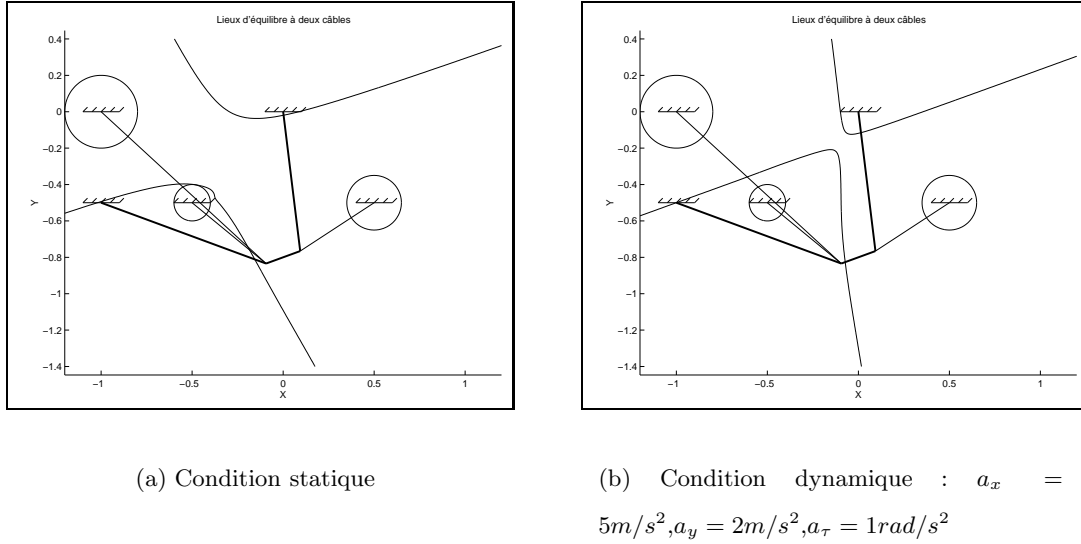


FIG. 4 – Les frontières d’équilibre d’un mécanisme plan à 3ddl (tableau 1).

section 3.2, les courbes ne sont pas des quadratiques, quoi qu’elles aient une forme se rapprochant d’une hyperbole.

5.2 Mécanisme à 3 ddl spatial

On illustre maintenant un exemple de courbes d’équilibre pour un mécanisme à câbles spatial à 3 ddl en positionnement. Il s’agit, comme dans le cas de l’exemple plan, d’un mécanisme comprenant trois liens passifs de type ressort. L’architecture et les conditions dynamiques sont illustrées au tableau 2.

À la figure 5, on observe les frontières d’équilibre pour un cas statique et un cas dynamique. Il est observé que les surfaces se rapprochent de plans, mais qu’elles ne sont tels seulement si les longueurs libres des ressorts sont nulles. Comme dans le cas du mécanisme plan comprenant des ressorts à longueur libre non nulle, les relations ne sont pas valides aux endroits où les ressorts sont en compression. Pour alléger la représentation, dans les cas spatiaux, ces zones ne sont pas tracées.

5.3 Mécanisme à 6 ddl spatial

Un exemple de frontières d’équilibre à 5 câbles est illustré pour un mécanisme à 6 ddl. L’architecture et la condition dynamique sont illustrées au tableau 3. Il s’agit de cinq câbles actifs et de

<i>Architecture</i>		
	\mathbf{p}_i	Longueur libre
Câble actionné 1	(0, 0, 0)	
Câble actionné 2	(1, 0.2, 0.2)	
Ressort 1 (10 N/m)	(0, 0.5, -0.6)	0.2 m
Ressort 2 (5 N/m)	(0.5, -0.5, -1)	0.1 m
Ressort 3 (1 N/m)	(1.2, 0.5, -0.75)	0.15 m
<i>Conditions dynamiques</i>		
Masse effecteur	1 kg	
Cas statique	nulles	
Cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 10m/s^2, a_z = 10m/s^2$	

TAB. 2 – Architecture d'un mécanisme spatial à 3 ddl (voir figure 5).

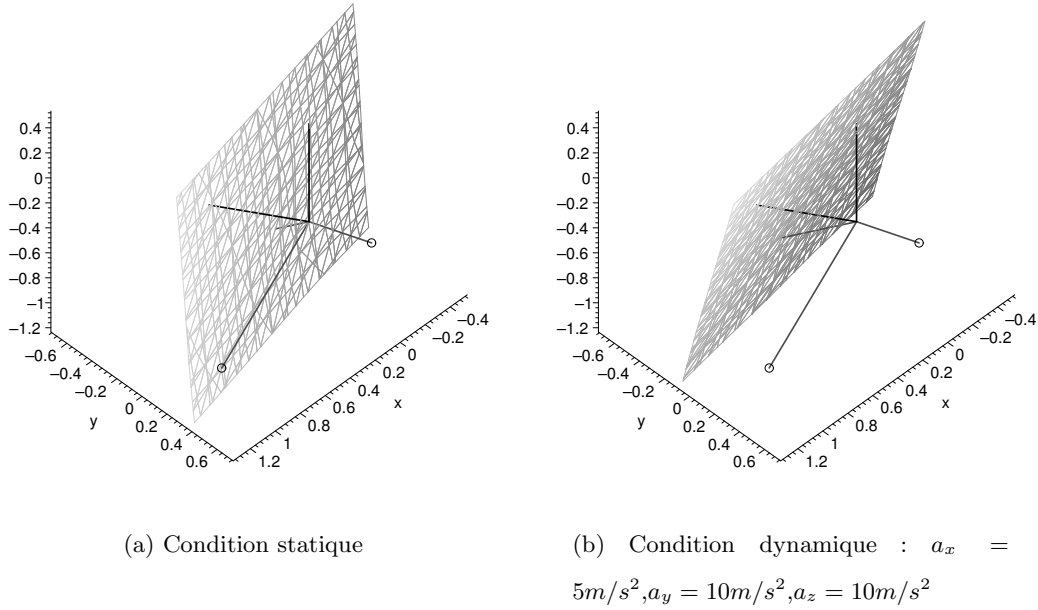


FIG. 5 – Les frontières d'équilibre d'un mécanisme spatial à 3 ddl (tableau 2) .

trois liens passifs de type ressort. Les trois liens passifs sont attachés au repère fixe à $z = -2$ et les cinq liens actifs à $z = 0$.

<i>Liens actifs</i>				
	\mathbf{p}_i		\mathbf{v}_i	
Câble actionné 1	(1, 1, 0)		(0.1, 0.1, 0)	
Câble actionné 2	(-1, 1, 0)		(-0.1, 0.1, 0)	
Câble actionné 3	(-1, -1, 0)		(-0.1, -0.1, 0)	
Câble actionné 4	(1, -1, 0)		(0.1, -0.1, 0)	
Câble actionné 5	(0, 0, 0)		(0, 0, 0)	
<i>Liens passifs</i>				
	\mathbf{p}_k	\mathbf{v}_k	Raideur	Longueur libre
Ressort 1	(1, 1, -2)	(1, 1, 0)	100 Nm	0.2 m
Ressort 2	(-1, 1, -2)	(-1, 1, 0)	10 Nm	0.1 m
Ressort 3	(0, -1, -2)	(1, 1, 0)	50 Nm	0.15 m
<i>Caractéristiques dynamiques</i>				
Masse	5 (kg)			
Inertie	$I_{xx} = I_{yy} = 5, I_{zz} = 2, I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ (kgm^2)			
Orientation (Euler ZYZ) (ϕ, θ, ψ)	(10, 25, 15) degrés			
<i>Condition dynamique</i>				
Vitesse angulaire	$\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 2)$ (rad/s)			
Accélération angulaire	$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (0.5, 2, 1)$ (rad/s^2)			
Accélération Cartésienne	$\ddot{\mathbf{c}} = (5, 10, 5)$ (m/s^2)			

TAB. 3 – Architecture d'un mécanisme spatial à 6 ddl (voir figure 6).

6 Considérations générales

Des relations vectorielles sont présentées pour plusieurs types de mécanismes à câbles plans et spatiaux, avec ou sans lien passif. Les relations présentées sont toujours du type $(\mathbf{V}_{perp})\mathbf{h}_e = 0$. \mathbf{V}_{perp} est un vecteur orthogonal au(x) câble(s) considéré(s) pour l'équilibre. Aussi, ces relations sont satisfaites dans les cas suivants :

1. Cas où $\mathbf{V}_{perp} = 0$. Ce cas correspond aux configurations où l'équation dégénère et n'est pas

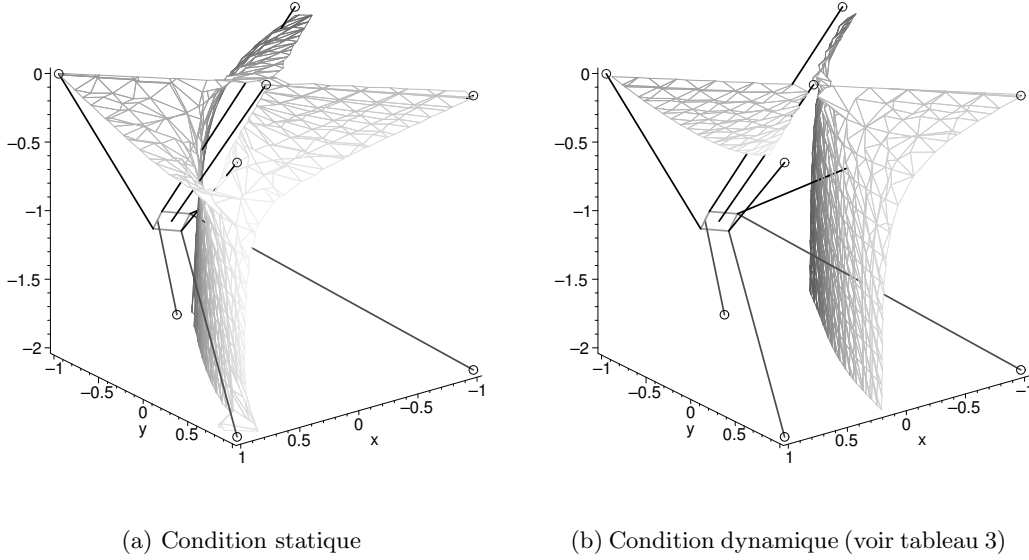


FIG. 6 – Les frontières d’équilibre d’un mécanisme spatial à 6 ddl (tableau 3).

en équilibre proprement dit. Pour des mécanismes à 2 ddl plans par exemple, ce cas survient quand la longueur du câble considéré pour l’équilibre est nulle. Pour des mécanismes à 3 et 6 ddl, ce cas survient quand les câbles d’équilibre ne sont pas indépendants.

2. Cas où $\mathbf{h}_e = 0$. Pour un mécanisme sans liaison passive, où $\mathbf{h}_e = \mathbf{h}$ n’est pas fonction des positions Cartésiennes, ce cas est le cas statique en apesanteur. Il s’agit donc d’un cas où le mécanisme est en équilibre statique. Pour les mécanismes avec des liens passifs, \mathbf{h}_e est fonction des positions Cartésiennes. Ce cas correspond donc aux positions Cartésiennes où les liens passifs à eux seuls produisent les forces voulues.
3. Cas général où $(\mathbf{V}_{perp})^T \mathbf{h}_e = 0$. Correspond aux frontières d’équilibre à proprement dites, c’est-à-dire aux endroits où $n - 1$ câble(s) produit(ent) la condition dynamique voulue. Il faut noter cependant que cette relation est satisfaite quand $n - 1$ câbles actionnés peuvent induire l’équilibre en tension ou en compression. Les relations obtenues ne sont donc pas systématiquement des relations d’équilibre mais plutôt des frontières potentielles d’équilibre.

7 Conclusion

Dans le cas de manipulateurs à câbles, il a été expliqué que l'unilatéralité d'actionnement des câbles engendre des différences majeures dans la nature de l'espace atteignable de tels mécanismes. Aussi, une formulation analytique générale des lieux d'équilibre est traitée dans ce cas de manipulateurs plans et spatiaux pouvant contenir des liens passifs.

Ainsi, on a étudié les lieux d'équilibre des manipulateurs plans et spatiaux pouvant contenir des liens passifs de type ressort et câble à tension constante. La même approche vectorielle a été utilisée pour les mécanismes plans à 2 et 3 ddl et pour les mécanismes spatiaux à 3 et 6 ddl. Cette approche permet d'exprimer simplement les équations d'équilibre, et peut permettre une compréhension plus intuitive.

Références

- [1] Sefrioui, J. et Gosselin, C. M., "On the Quadratic Nature of the Singularity Curves of Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, 1995, vol. 30, n^o 4, pages 533-551.
- [2] Mayer St-Onge, B., et Gosselin, C. M., "Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform", *International Journal of Robotics Research*, March 2000, vol. 19, n^o 3, p. 271-288.
- [3] Barrette, G. et Gosselin, C. M., "Kinematic Analysis and Design of Planar Parallel Mechanisms Actuated with Cables", *Comptes-rendus de la 26th ASME Biennial Mechanisms Conference*, Baltimore, États-Unis, septembre, 2000.
- [4] Barrette, G., "Analyse des mécanismes parallèles actionnés par câbles", mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, octobre, 2000.
- [5] Cone, L. L., "Skycam : An Aerial Robotic Camera System", *Byte*, October 1995, pp.122-132.
- [6] Kawamura, S., Choe, W., Tanaka, S., Pandian, S., "Development of an Ultrahigh Speed Robot FALCON using Wire Drive System", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nagoya, Japan, Mai 1995, p.215-220.

- [7] Lafourcade, P., Llibre, M., Reboulet C., “Design of Parallel Wire-Driven Manipulator for Wind Tunnels”, *Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Québec City, Qc, Canada, Oct 2002, pp.187-194.
- [8] Abbas Fattah, Sunil K. Agrawal, “Workspace and design analysis of cable-suspended planar parallel robots”, *Proceeding of the ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, Montreal, Canada, September 29-October 2, 2002, DETC2002/MECH-34330.
- [9] Tatsuo Arai, Kei Yuasa, Yahushi Mae, Kenji Inoue, Kunio Miyawaki, Noriho Koyashi, “A Hybrid Drive Parallel Arm for Heavy Material Handling”, *IEEE Robotics and Automation*, March 2002, pp.45-54.