

## Isotropie des manipulateurs parallèles de la classe H4

Benoit Rousseau<sup>1</sup>, Luc Baron<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, benoit.rousseau@polymtl.ca*

<sup>2</sup>*Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, luc.baron@polymtl.ca*

---

### Résumé

Cet article présente les conditions d'isotropie de la classe topologique du manipulateur parallèle à nacelle articulée H4 possédant quatre degrés de liberté. Un modèle cinématique de cette classe de manipulateurs est d'abord développé, puis on impose une condition isotrope à la matrice jacobienne. Des équations obtenues on trouve les contraintes et une procédure de design permettant de déterminer toutes les géométries isotropes. La procédure de design proposée permet de choisir et de calculer successivement chacun des paramètres géométriques d'un manipulateur isotrope de classe H4.

**Mots-clé:** isotropie, manipulateur parallèle, nacelle articulée, cinématique.

---

### Isotropy of the H4 class of parallel manipulators

#### Abstract

This paper presents the isotropic conditions for the topological class of the H4 parallel manipulator with articulated travelling plate which has four degrees of freedom. First, a kinematic model of this class of manipulators is developed, then we impose isotropic conditions on the jacobian matrix. From the newly obtained equations, design constraints and a design procedure permitting the determination of all isotropic geometry are obtained. The proposed design procedure permit the successive choice and calculus of each and all geometrical parameters of an H4 class isotropic manipulator.

**Keywords:** isotropy, parallel manipulator, traveling plate, kinematics.

---

## 1 INTRODUCTION

On souhaite déterminer les conditions d'isotropie des manipulateurs parallèles à nacelle articulée appartenant à la même classe topologique que le manipulateur H4.

Tel que défini dans [1] : une classe topologique est l'ensemble de tous les mécanismes ayant la même topologie, sans tenir compte de la géométrie. La topologie décrit l'agencement des joints du manipulateur tandis que la géométrie décrit la localisation relative des joints sur les liens. Un nombre nécessaire et suffisant de paramètres géométriques doit permettre de décrire de manière unique toutes les géométries d'une classe topologique.

Ainsi, la modélisation et l'étude des conditions géométriques permettant d'atteindre l'isotropie ont été proposées pour les manipulateurs de la classe Star [2] et de la classe Delta [3], par exemple.

Le manipulateur parallèle à nacelle articulée H4 (voir figure 2) a été développé au laboratoire d'informatique, de robotique et de microélectronique de Montpellier. Sa topologie est illustrée à la figure 1 où  $R$  est une liaison rotoïde et  $S$  une liaison Sphérique. Ce robot possède quatre degrés de liberté : trois en translation et un en rotation [4]. Les manipulateurs parallèles comme le H4 sont particulièrement intéressants car ils possèdent des caractéristiques complémentaires aux manipulateurs sériels.

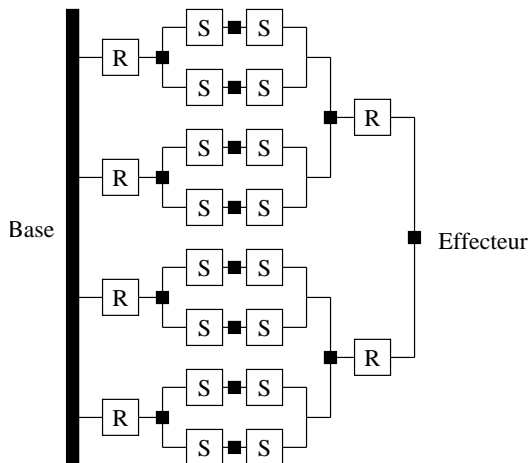


Figure 1. Topologie du manipulateur H4

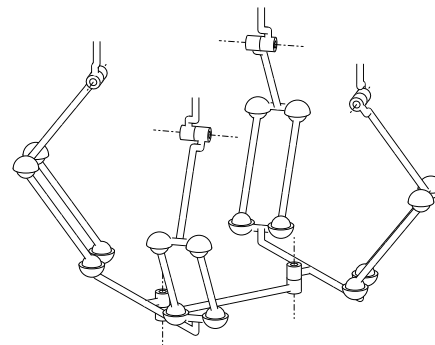


Figure 2. Architecture du manipulateur H4

Les conditions d'isotropie que l'on souhaite déterminer permettront au manipulateur de déplacer son effecteur à des vitesses égales dans toutes les directions à partir de commandes de même intensité. Cette propriété est très intéressante car le manipulateur démontre à cet état ses meilleures performances cinématiques. De plus, les positions isotropes se trouvent loin des singularités.

Pour déterminer les conditions d'isotropie, il faut chercher les conditions à appliquer aux matrices jacobiniennes. Étant donné que les matrices jacobiniennes dépendent à la fois de la position articulaire et de la géométrie, il est difficile d'avoir une géométrie isotrope en tout les points. Ainsi,

seules quelques géométries particulières peuvent atteindre l'isotropie, et ce, seulement pour une ou quelques positions articulaires.

On cherche donc les conditions permettant d'obtenir des géométries isotropes, et non pas uniquement les positions articulaires isotropes d'une géométrie particulière.

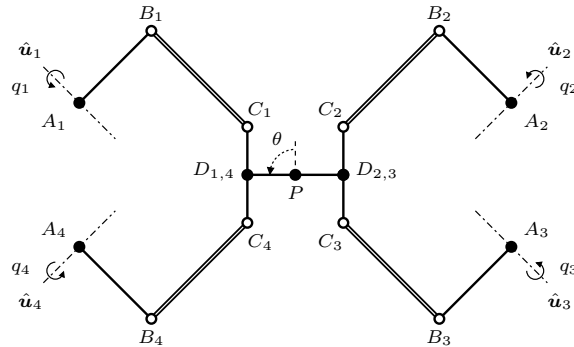


Figure 3. Représentation schématique du manipulateur H4

## 2 MODÉLISATION DE LA CLASSE H4

En se référant à la figure 3, les points  $\{A_i\}_1^4$  sont fixes et attachés à la base tandis que le point  $P$  est attaché à l'effecteur et est donc mobile. Les articulations aux points  $A_i$  et  $D_i$  sont de type rotoïde tandis que les articulations aux points  $B_i$  et  $C_i$  sont de type sphérique. Les barres reliant les points  $A_i$  aux points  $B_i$  tournent autour des axes  $\hat{u}_i$  d'un angle  $q_i$ ; l'effecteur situé au point  $P$  tourne quant à lui d'un angle  $\theta$  autour d'un axe normal au plan engendré par le mouvement relatif des points  $C_i$  sans perte de généralité, cet axe est choisi comme le vecteur unitaire  $\hat{k}$  dans le référentiel global.

Le segment  $r_i$  reliant les points  $B_i$  et  $C_i$  est une articulation de type II qui propage l'orientation de l'axe  $\hat{u}_i$  situé au point  $A_i$  jusqu'au point  $C_i$ . Les barres reliant les points  $C_i$  conservent toujours leur orientation. Lorsqu'elles se meuvent l'une par rapport à l'autre, elles le font toujours dans un même plan de telle sorte que la rotation de l'effecteur situé au point  $P$  engendrée par leurs mouvements relatifs se fait autour de l'axe du vecteur unitaire  $\hat{k}$  qui conserve toujours la même orientation.

La position du point  $A_i$  appartenant à la base ainsi que la position de l'effecteur  $P$  sont toutes deux connues relativement à un référentiel global. Sachant quel est l'angle  $q_i$  de l'articulation rotoïde motorisée située en  $A_i$ , il est possible de trouver la position du point  $B_i$ . À partir de la position et de l'angle  $\theta$  de l'effecteur  $P$ , il est possible, de trouver la position du point  $C_i$  (voir figure 4).

Étant donné que les points  $C_i$  et  $B_i$  sont reliés par un corps rigide, ces deux points sont liés mathématiquement à l'aide d'une condition de rigidité. En effet, la norme du vecteur  $r_i$  allant du point  $B_i$  au point  $C_i$  est constante et égale à  $r_i$ .

## 2.1 Condition de rigidité

La distance  $r_i$  entre les deux points  $B_i$  et  $C_i$  appartenant à un même corps rigide est toujours constante :

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i = r_i^2 \quad (1)$$

En dérivant (1) par rapport au temps, la condition de rigidité exprimée en termes de vitesses est obtenue :

$$\dot{\mathbf{b}}_i^T \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{c}}_i^T \mathbf{r}_i \quad (2)$$

où  $\dot{\mathbf{b}}_i$  et  $\dot{\mathbf{c}}_i$  sont respectivement les vitesses des points  $B_i$  et  $C_i$  par rapport à un même référentiel. Cette expression représente l'équiprojectivité des vitesses  $\dot{\mathbf{b}}_i$  et  $\dot{\mathbf{c}}_i$  sur l'axe  $\mathbf{r}_i$  reliant les points  $B_i$  et  $C_i$  d'un même corps rigide.

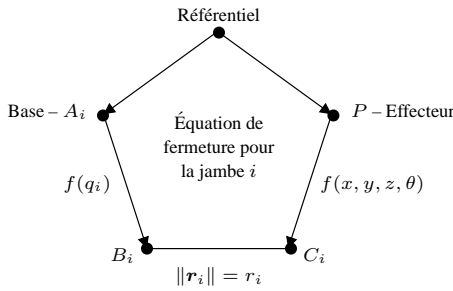


Figure 4. Représentation schématique de la fermeture des équations pour chacune des jambes

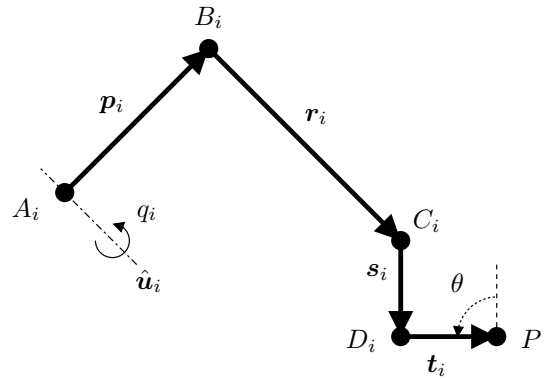


Figure 5. Une jambe isolée

## 2.2 Équations de fermeture

À partir de la figure 5, il est possible d'écrire l'équation de fermeture de la boucle cinématique  $i$  tel que :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{p}_i(q_i) \quad (3)$$

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{p} - \mathbf{t}_i(\theta) - \mathbf{s}_i \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{b}_i \quad (5)$$

où  $\mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{b}_i$ ,  $\mathbf{c}_i$  et  $\mathbf{p}$  sont, respectivement, les vecteurs positions des points  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $P$ . Le vecteur  $\mathbf{p}_i$  est fonction de  $q_i$  et le vecteur  $\mathbf{t}_i$  est fonction de  $\theta$ . En substituant (3) et (4) dans (5), nous obtenons :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p} - \mathbf{t}_i(\theta) - \mathbf{s}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{p}_i(q_i) \quad (6)$$

Puis en substituant (6) dans (1), il en résulte :

$$r_i^2 = \mathbf{r}_i^T (\mathbf{p} - \mathbf{t}_i(\theta) - \mathbf{s}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{p}_i(q_i)) \quad (7)$$

En dérivant (7) par rapport au temps :

$$\mathbf{r}_i^\top \left( \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}}) \dot{\theta} - (\mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i) \dot{q}_i \right) = 0 \quad (8)$$

où  $\hat{\mathbf{k}}$  est un vecteur unitaire du repère global parallèle à l'axe de rotation de la plate-forme. En utilisant la propriété de distributivité du produit scalaire, il est possible de réécrire l'équation (8) en séparant les termes  $\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{q}_i$  :

$$\mathbf{r}_i^\top \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{r}_i^\top (\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}}) \dot{\theta} = \mathbf{r}_i^\top (\mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i) \dot{q}_i \quad (9)$$

Cette équation permet de relier la vitesse de l'articulation motorisée  $\dot{q}_i$  située à la base d'une jambe aux vitesses de l'effecteur  $\dot{\mathbf{p}}$  et  $\dot{\theta}$ . En écrivant l'équation (9) pour chacune des quatre jambes, nous obtenons le système algébrique linéaire suivant :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (10)$$

où

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T & \mathbf{r}_1^T (\mathbf{t}_1 \times \hat{\mathbf{k}}) \\ \mathbf{r}_2^T & \mathbf{r}_2^T (\mathbf{t}_2 \times \hat{\mathbf{k}}) \\ \mathbf{r}_3^T & \mathbf{r}_3^T (\mathbf{t}_3 \times \hat{\mathbf{k}}) \\ \mathbf{r}_4^T & \mathbf{r}_4^T (\mathbf{t}_4 \times \hat{\mathbf{k}}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T (\mathbf{p}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_1) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{r}_4^T (\mathbf{p}_4 \times \hat{\mathbf{u}}_4) \end{bmatrix} \quad (11)$$

et  $\dot{\mathbf{x}}$  est le vecteur vitesse de l'effecteur,  $\dot{\mathbf{q}}$  le vecteur vitesse articulaire,  $\mathbf{A}$  est de dimension  $4 \times 4$  et  $\mathbf{B}$  est diagonale de dimension  $4 \times 4$ .

### 3 FORMULATION DU PROBLÈME

On souhaite déterminer les conditions d'isotropie à appliquer aux matrices jacobiennes (10) développées à la section 2.2.

#### 3.1 Adimensionalisation

Un manipulateur qui peut à la fois se positionner et s'orienter dans l'espace possède des matrices jacobiennes dimensionnellement non homogènes puisque les jacobiennes font intervenir à la fois des longueurs, dimensionnelles, et des angles, adimensionnels. La non homogénéité de la matrice jacobienne est éliminée en introduisant une longueur caractéristique [5, 6]. Pour obtenir des matrices jacobiennes dimensionnellement homogènes, il faut donc diviser les deux côtés de l'équation de vitesse linéaires par une longueur caractéristique de telle sorte que les matrices deviennent adimensionnelles.

L'analyse de (10) révèle qu'en prenant  $L$  comme unité de longueur et  $T$  comme unité de temps, les deux côtés de l'équation ont  $L^2/T$  comme unité. Par contre, la matrice jacobiennes  $\mathbf{A}$  a des

composantes aux dimensions  $L$  et  $L^2$  tandis que la matrice  $B$  a des composantes en  $L^2$ .

Sous forme adimensionnelle, lorsque  $\lambda$  est pris comme longueur naturelle, les matrices jacobiennes  $A$  et  $B$  se réécrivent :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T/\lambda & \mathbf{r}_1^T \left( \mathbf{t}_1 \times \hat{\mathbf{k}} \right) / \lambda^2 \\ \mathbf{r}_2^T/\lambda & \mathbf{r}_2^T \left( \mathbf{t}_2 \times \hat{\mathbf{k}} \right) / \lambda^2 \\ \mathbf{r}_3^T/\lambda & \mathbf{r}_3^T \left( \mathbf{t}_3 \times \hat{\mathbf{k}} \right) / \lambda^2 \\ \mathbf{r}_4^T/\lambda & \mathbf{r}_4^T \left( \mathbf{t}_4 \times \hat{\mathbf{k}} \right) / \lambda^2 \end{bmatrix} \quad B \equiv \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{r}_1^T (\mathbf{p}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_1)}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{r}_4^T (\mathbf{p}_4 \times \hat{\mathbf{u}}_4)}{\lambda^2} \end{bmatrix}$$

### 3.2 Condition d'isotropie

La condition d'isotropie pour la matrice jacobienne s'exprime ainsi :

$$\dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} = 1 \quad (12)$$

Cela consiste à restreindre la vitesse que peut adopter l'effecteur dans n'importe quelle direction à une vitesse unitaire. Le domaine des vitesses possibles de l'effecteur est donc restreint à une sphère unitaire de dimension  $m$ , où  $m$  est le nombre de degrés de liberté du manipulateur, c'est-à-dire le nombre de colonnes de la matrice jacobienne. Une matrice jacobienne est dite isotrope lorsqu'elle transforme une sphère unitaire dans l'espace à  $m$  dimensions de l'effecteur en une sphère à  $n$  dimensions dans l'espace des joints à un facteur d'échelle près.

En substituant (10) dans l'équation (12), nous obtenons :

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} = 1$$

qui représente un ellipsoïde de vitesses dans l'espace à  $n$  dimensions des joints. La matrice  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  est donc isotrope si ses valeurs singulières sont toutes identiques et différentes de zéro :

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \alpha^2 \mathbf{1} \quad (13)$$

où  $\mathbf{C}^T \equiv \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$

### 3.3 Isotropie de la matrice $C$

La matrice  $C$  s'écrit donc :

$$\mathbf{C}^T \equiv \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{r}_1^T / g_1 & h_1 / g_1 \\ \lambda \mathbf{r}_2^T / g_2 & h_2 / g_2 \\ \lambda \mathbf{r}_3^T / g_3 & h_3 / g_3 \\ \lambda \mathbf{r}_4^T / g_4 & h_4 / g_4 \end{bmatrix}$$

où  $g_i \equiv \mathbf{r}_i^T (\mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i)$  et  $h_i \equiv \mathbf{r}_i^T (\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}})$

Les conditions d'isotropie de la matrice  $\mathbf{C}$  (13) sont des conditions d'orthogonalité. Les lignes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormale. Les lignes ont toutes la même norme et sont toutes mutuellement perpendiculaires. Il en est automatiquement de même pour les colonnes qui forment elles aussi une base orthonormale.

### 3.3.1 Conditions d'orthogonalité

Le produit scalaire entre 2 lignes (ou colonnes) de la matrice  $\mathbf{C}$  doit être nul :

$$[\lambda \mathbf{r}_i^\top / g_i \quad h_i / g_i] [\lambda \mathbf{r}_j^\top / g_j \quad h_j / g_j]^\top = 0$$

Lorsque développé :

$$\left( \frac{\lambda \mathbf{r}_i}{g_i} \right) \cdot \left( \frac{\lambda \mathbf{r}_j}{g_j} \right) + \left( \frac{h_i}{g_i} \right) \left( \frac{h_j}{g_j} \right) = 0$$

En simplifiant les  $g_i$  et en développant les  $h_i$  nous obtenons :

$$\lambda^2 \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j + (\mathbf{r}_i^\top (\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}})) (\mathbf{r}_j^\top (\mathbf{t}_j \times \hat{\mathbf{k}})) = 0$$

Si l'équation est divisée par  $\|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{r}_j\|$  alors :

$$\lambda^2 \hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_j - (\hat{\mathbf{r}}_i^\top (\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}})) (\hat{\mathbf{r}}_j^\top (\mathbf{t}_j \times \hat{\mathbf{k}})) = 0 \quad (14)$$

Les vecteurs  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$  de l'équation (14) deviennent unitaires. En utilisant les définitions du produit scalaire et du produit vectoriel, tout en fixant sans perte de généralité  $\sin \angle \frac{\mathbf{t}_i}{\hat{\mathbf{k}}} = 1$  qui intervient dans les produits vectoriels :

$$-\lambda^2 \cos \angle \frac{\hat{\mathbf{r}}_j}{\hat{\mathbf{r}}_i} = t_i \cos \angle \frac{\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{r}}_i} t_j \cos \angle \frac{\mathbf{t}_j \times \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{r}}_j} \quad (15)$$

On peut réécrire (15) pour toutes les paires de lignes de la matrice  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} -\sigma_{1,2} &= \frac{t_{1,4}}{\lambda} \mu_1 \frac{t_{2,3}}{\lambda} \mu_2 & -\sigma_{1,3} &= \frac{t_{1,4}}{\lambda} \mu_1 \frac{t_{2,3}}{\lambda} \mu_3 & -\sigma_{1,4} &= \frac{t_{1,4}}{\lambda} \mu_1 \frac{t_{1,4}}{\lambda} \mu_4 \\ -\sigma_{2,3} &= \frac{t_{2,3}}{\lambda} \mu_2 \frac{t_{2,3}}{\lambda} \mu_3 & -\sigma_{2,4} &= \frac{t_{2,3}}{\lambda} \mu_2 \frac{t_{1,4}}{\lambda} \mu_4 & -\sigma_{3,4} &= \frac{t_{2,3}}{\lambda} \mu_3 \frac{t_{1,4}}{\lambda} \mu_4 \end{aligned} \quad (16)$$

où  $\mu_i \equiv \cos \angle \frac{\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{r}}_i} \equiv \hat{\mathbf{r}}_i^\top (\hat{\mathbf{t}}_i \times \hat{\mathbf{k}})$  et  $\sigma_{i,j} \equiv \cos \angle \frac{\hat{\mathbf{r}}_j}{\hat{\mathbf{r}}_i} \equiv \hat{\mathbf{r}}_i^\top \hat{\mathbf{r}}_j$ . Il y a donc 6 équations liées à la condition d'orthogonalité (éléments hors-diagonaux symétriques de la matrice identité). De plus, les  $t_i$  y apparaissent divisés pas  $\lambda$ , ils sont donc normalisés. Étant donné que  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_4$  représentent le même vecteur, on les a écrit sous la forme  $t_{1,4}$ . Il en est de même pour  $\mathbf{t}_2$  et  $\mathbf{t}_3$  que l'on a écrit sous la forme  $t_{2,3}$ .

En définissant  $\beta_i \equiv \frac{t_i}{\lambda} \mu_i$ , (16) devient :

$$\begin{aligned} -\sigma_{1,2} &= \beta_1 \beta_2 & -\sigma_{1,3} &= \beta_1 \beta_3 & -\sigma_{1,4} &= \beta_1 \beta_4 \\ -\sigma_{2,3} &= \beta_2 \beta_3 & -\sigma_{2,4} &= \beta_2 \beta_4 & -\sigma_{3,4} &= \beta_3 \beta_4 \end{aligned} \quad (17)$$

En manipulant ce système d'équations, on découvre la contrainte suivante :

$$\sigma_{1,2} \sigma_{3,4} = \sigma_{1,3} \sigma_{2,4} = \sigma_{1,4} \sigma_{2,3} \quad (18)$$

### 3.3.2 Conditions de normalité

Toutes les lignes (ou colonnes) de la matrice  $C$  doivent avoir la même norme :

$$[\lambda \mathbf{r}_i^\top / g_i \quad h_i / g_i] [\lambda \mathbf{r}_i^\top / g_i \quad h_i / g_i]^\top = \alpha^2$$

Lorsque développé :

$$\left(\frac{\lambda \mathbf{r}_i}{g_i}\right) \cdot \left(\frac{\lambda \mathbf{r}_i}{g_i}\right) + \left(\frac{h_i}{g_i}\right) \left(\frac{h_i}{g_i}\right) = \alpha^2$$

En déplaçant les  $g_i$  de l'autre côté de l'égalité nous obtenons :

$$\lambda^2 \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i + \left(\mathbf{r}_i^\top (\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}})\right)^2 = \alpha^2 \left(\mathbf{r}_i^\top (\mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i)\right)^2$$

Si l'équation est divisée par  $\|\mathbf{r}_i\|^2$  alors :

$$\lambda^2 + \left(\hat{\mathbf{r}}_i^\top (\mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}})\right)^2 = \alpha^2 \left(\hat{\mathbf{r}}_i^\top (\mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i)\right)^2 \quad (19)$$

Les vecteurs  $\mathbf{r}_i$  de l'équation (19) deviennent unitaires. En utilisant la définition du produit scalaire et du produit vectoriel, tout en fixant sans perte de généralité  $\sin \angle \mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}} = 1$  et  $\sin \angle \mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i = 1$  qui interviennent dans les produits vectoriels :

$$\lambda^2 + t_i^2 \cos^2 \angle \mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}} = \alpha^2 p_i^2 \cos^2 \angle \mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i$$

On peut réécrire cette équation pour toutes les lignes de la matrice  $C$  :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{t_{1,4}^2}{\lambda^2} \mu_1^2 &= \alpha^2 \frac{p_1^2}{\lambda^2} \eta_1^2 & 1 + \frac{t_{2,3}^2}{\lambda^2} \mu_2^2 &= \alpha^2 \frac{p_2^2}{\lambda^2} \eta_2^2 \\ 1 + \frac{t_{2,3}^2}{\lambda^2} \mu_3^2 &= \alpha^2 \frac{p_3^2}{\lambda^2} \eta_3^2 & 1 + \frac{t_{1,4}^2}{\lambda^2} \mu_4^2 &= \alpha^2 \frac{p_4^2}{\lambda^2} \eta_4^2 \end{aligned} \quad (20)$$

où  $\mu_i \equiv \cos \angle \mathbf{t}_i \times \hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{r}}_i^\top (\hat{\mathbf{t}}_i \times \hat{\mathbf{k}})$  et  $\eta_i \equiv \cos \angle \mathbf{p}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i \equiv \hat{\mathbf{r}}_i^\top (\hat{\mathbf{p}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_i)$ . Il y a donc 4 équations liées à la condition de normalité (éléments diagonaux de la matrice identité). De plus, les  $t_i$  et  $p_i$  y apparaissent divisés par  $\lambda$ , ils sont donc normalisés.

### 3.3.3 Relation entre les $\sigma_{i,j}$

Lorsque la condition d'orthogonalité faisant intervenir les  $\hat{\mathbf{r}}_i$  est écrite sous forme scalaire, seul les angles entre les  $\hat{\mathbf{r}}_i$  apparaissent sous la forme de  $\sigma_{i,j}$ . Il existe néanmoins une forte relation entre ces angles qui doit être respectée. Il suffit de connaître 5 de ces angles pour pouvoir déterminer la valeur absolue du 6<sup>ème</sup> à l'aide de la loi des cosinus sphériques.

La relation que les  $\sigma_{i,j}$  doivent respecter est :

$$\arccos \left( \frac{\sigma_{1,2} - \sigma_{1,4}\sigma_{2,4}}{\kappa_{1,4}\kappa_{2,4}} \right) \pm \arccos \left( \frac{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,4}\sigma_{3,4}}{\kappa_{1,4}\kappa_{3,4}} \right) \pm \arccos \left( \frac{\sigma_{2,3} - \sigma_{2,4}\sigma_{3,4}}{\kappa_{2,4}\kappa_{3,4}} \right) = 0 \quad (21)$$



où  $\sigma_{i,j} \equiv \cos \angle \hat{r}_i^j$  et  $\kappa_{i,j} \equiv \sin \angle \hat{r}_i^j$ .

De plus, pour que l'équation (21) soit respectée et pour que les solutions ne soient pas complexes, on doit avoir les contraintes suivantes :

$$-1 \leq \frac{\sigma_{1,2} - \sigma_{1,4}\sigma_{2,4}}{\kappa_{1,4}\kappa_{2,4}} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,4}\sigma_{3,4}}{\kappa_{1,4}\kappa_{3,4}} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{\sigma_{2,3} - \sigma_{2,4}\sigma_{3,4}}{\kappa_{2,4}\kappa_{3,4}} \leq 1 \quad (22)$$

#### 4 SOLUTIONS ISOTROPES

Il y a en tout 11 équations, voir (16)(20)(21), associées à la condition isotrope appliquée à la matrice  $C$ . Il est possible de réduire ce système d'équations en une seule équation en substituant (16) et (20) dans (21). Le choix des paramètres intervenant dans ces équations reste néanmoins plus facile lorsque ces équations forment un système plutôt qu'une équation unique.

##### 4.1 Procédure de design

Il est possible d'obtenir une solution isotrope en choisissant et en calculant successivement chacun des paramètres intervenant dans les équations d'isotropie.

**Choix de  $\sigma_{1,4}$**  Il faut tout d'abord choisir une valeur pour  $\sigma_{1,4}$ . Étant donné que les  $\sigma_{i,j}$  sont des cosinus,  $\sigma_{1,4}$  doit être choisi dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**Choix de  $\sigma_{2,4}$**  En considérant les contraintes (22) et puisque les valeurs extrêmes des  $\sigma_{i,j}$  sont  $-1$  et  $1$ , on a donc :

$$\begin{aligned} -\kappa_{1,4}\kappa_{2,4} &\leq (+1) - \sigma_{1,4}\sigma_{2,4} \leq \kappa_{1,4}\kappa_{2,4} && \text{pour } \sigma_{1,2} = +1 \\ -\kappa_{1,4}\kappa_{2,4} &\leq (-1) - \sigma_{1,4}\sigma_{2,4} \leq \kappa_{1,4}\kappa_{2,4} && \text{pour } \sigma_{1,2} = -1 \end{aligned}$$

donc, après quelques manipulations,  $\sigma_{2,4}$  doit être choisi dans le plus petit intervalle entre  $[-1, +1]$  et  $[-\sqrt{1 - \sigma_{1,4}^2}, +\sqrt{1 - \sigma_{1,4}^2}]$

**Choix de  $\sigma_{1,2}$**  Des équations (17) on sait que :

$$\beta_1 = -\frac{\sigma_{1,4}}{\beta_4} \quad \text{et} \quad \beta_2 = -\frac{\sigma_{2,4}}{\beta_4} \quad \text{donc} \quad -\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{1,4}\sigma_{2,4}}{\beta_4^2} \quad \text{et ainsi} \quad \frac{\sigma_{1,2}}{|\sigma_{1,2}|} = - \left( \frac{\sigma_{1,4}}{|\sigma_{1,4}|} \right) \left( \frac{\sigma_{2,4}}{|\sigma_{2,4}|} \right)$$

Le signe de  $\sigma_{1,2}$  doit donc être l'inverse du signe obtenu par le produit de  $\sigma_{1,4}$  et  $\sigma_{2,4}$ .

À partir des conditions (22), on doit donc choisir  $\sigma_{1,2}$  dans l'intervalle  $[0, \sigma_{1,4}\sigma_{2,4} + \sqrt{1 - \sigma_{1,4}^2}\sqrt{1 - \sigma_{2,4}^2}]$  ou  $[0, \sigma_{1,4}\sigma_{2,4} - \sqrt{1 - \sigma_{1,4}^2}\sqrt{1 - \sigma_{2,4}^2}]$  selon le signe de  $\sigma_{1,2}$ .

**Calcul de  $\sigma_{1,3}$**  À partir de (17), on peut exprimer  $\sigma_{2,3}$  et  $\sigma_{2,4}$  en fonction de  $\sigma_{1,2}$ ,  $\sigma_{1,3}$ ,  $\sigma_{1,4}$  et  $\sigma_{2,4}$  :

$$\sigma_{2,3} = \frac{\sigma_{1,3}\sigma_{2,4}}{\sigma_{1,4}} \quad \sigma_{3,4} = \frac{\sigma_{1,3}\sigma_{2,4}}{\sigma_{1,2}} \quad (23)$$

En substituant (23) dans (21), on obtient une équation uniquement fonction de  $\sigma_{1,2}$ ,  $\sigma_{1,3}$ ,  $\sigma_{1,4}$  et  $\sigma_{2,4}$ . Seul  $\sigma_{1,3}$  est inconnu et il est possible de l'isoler :

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} = & \pm(\sigma_{1,4}^2(-\sigma_{2,4}^4 + \sigma_{2,4}^2 - \sigma_{1,4}^4 - 2\sigma_{1,4}^2\sigma_{2,4}^2 - \sigma_{1,4}^2\sigma_{1,2}^2 - 2\sigma_{1,2}\sigma_{1,4}\sigma_{2,4} - \sigma_{2,4}^2\sigma_{1,2}^2 + \\ & 2\sigma_{1,2}^3\sigma_{1,4}\sigma_{2,4} - 4\sigma_{1,2}^2\sigma_{1,4}^2\sigma_{2,4}^2 + 4\sigma_{1,2}\sigma_{1,4}\sigma_{2,4}^3 + 4\sigma_{1,2}\sigma_{1,4}^3\sigma_{2,4} + \sigma_{1,4}^2))^{(1/2)} \\ & \sigma_{1,2}((-\sigma_{1,4}^2 + 2\sigma_{1,2}\sigma_{1,4}\sigma_{2,4} - \sigma_{2,4}^2)(\sigma_{1,2} - \sigma_{1,4}\sigma_{2,4})^2 / (2\sigma_{1,2}^3\sigma_{1,4}\sigma_{2,4} - 3\sigma_{1,2}^2\sigma_{1,4}^2\sigma_{2,4}^2 - \\ & \sigma_{1,4}^2\sigma_{1,2}^2 - \sigma_{2,4}^2\sigma_{1,2}^2 + 2\sigma_{1,2}\sigma_{1,4}^3\sigma_{2,4} + 2\sigma_{1,2}\sigma_{1,4}\sigma_{2,4}^3 - \sigma_{1,4}^2\sigma_{2,4}^2))^{(1/2)} \\ & / (2\sigma_{1,2}^2\sigma_{1,4}\sigma_{2,4} - 2\sigma_{1,2}\sigma_{1,4}^2\sigma_{2,4}^2 - \sigma_{1,2}\sigma_{2,4}^2 - \sigma_{1,2}\sigma_{1,4}^2 + \sigma_{1,4}^3\sigma_{2,4} + \sigma_{1,4}\sigma_{2,4}^3) \quad (24) \end{aligned}$$

Le signe de  $\sigma_{1,3}$  peut être choisi librement.

**Calcul des  $\sigma_{2,3}$  et  $\sigma_{2,4}$**  Connaissant tous les autres  $\sigma_{i,j}$  et à l'aide de l'équation (23), on calcule aisément  $\sigma_{2,3}$  et  $\sigma_{3,4}$ .

**Calcul des  $\beta_i$**  À partir de la définition de  $\beta_i$  et des équations (17), on peut exprimer  $\beta_1$  en fonction des  $\sigma_{i,j}$  :

$$\beta_1 = \pm \sqrt{\frac{-\sigma_{1,2}\sigma_{1,3}}{\sigma_{2,3}}} \quad (25)$$

Le signe de  $\beta_1$  peut être choisi librement. On peut alors calculer les autres  $\beta_i$  aisément :

$$\beta_2 = -\frac{\sigma_{1,2}}{\beta_1} \quad \beta_3 = -\frac{\sigma_{1,3}}{\beta_1} \quad \beta_4 = -\frac{\sigma_{1,4}}{\beta_1} \quad (26)$$

**Calcul des  $\mu_i$  et des  $\hat{r}_i$**  Étant donné que  $\beta_1$  et  $\beta_4$  partagent le même  $t_{1,4}$  et qu'il en est de même pour  $\beta_2$  et  $\beta_3$  qui partagent le même  $t_{2,3}$ , alors en les combinant on obtient les relations suivantes :

$$\frac{\beta_1}{\mu_1} = \frac{\beta_4}{\mu_4} \quad \frac{\beta_2}{\mu_2} = \frac{\beta_3}{\mu_3} \quad (27)$$

Ainsi, si l'on combine ces relations aux définitions suivantes déjà énoncées :

$$\hat{r}_i \hat{r}_j = \beta_i \beta_j \quad \mu_i = \hat{r}_i (\hat{t}_i \times \hat{k})$$

On a alors un système d'équations faisant intervenir  $\hat{r}_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\mu_i$  et  $\hat{t}_i \times \hat{k}$ .

On cherche une solution à ce système d'équations. On choisi sans perte de généralité  $\hat{t}_i \times \hat{k}$  comme étant selon l'axe des  $y$ . Afin de n'avoir qu'une seule solution possible on choisi de restreindre  $\hat{r}_1$  à être dans le quadrant positif du plan  $y - z$  et de restreindre  $\hat{r}_2$  à avoir une composante en  $x$  positive. On peut alors trouver numériquement les  $\hat{r}_i$  et les  $\mu_i$  qui satisfont ces conditions. Toutes les rotations des vecteurs  $\hat{r}_i$  autour de l'axe  $y$  et leurs réflexions par rapport aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont alors aussi des solutions.

**Calcul des  $t_i/\lambda$**  Ayant déterminé les  $\mu_i$ , on peut déterminer la valeur de  $t_{1,4}/\lambda$  et de  $t_{2,3}/\lambda$  à partir de la définition des  $\beta_i$  :

$$t_{1,4}/\lambda = B1/\mu_1 \quad t_{2,3}/\lambda = B2/\mu_2 \quad (28)$$

**Choix de  $\alpha$**  Le facteur d'amplification  $\alpha$  peut être choisi librement mais doit être positif.

**Choix de  $\eta_i$**  Les  $\eta_i$  sont des cosinus, on peut les choisir librement dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**Calcul des  $p_i/\lambda$**  À partir de l'équation (20) on peut alors trouver les  $p_i/\lambda$  :

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\lambda} &= \frac{1 + (t_{1,4}/\lambda)^2 \mu_1^2}{\sqrt{\alpha^2 \eta_1^2}} & \frac{p_2}{\lambda} &= \frac{1 + (t_{2,3}/\lambda)^2 \mu_2^2}{\sqrt{\alpha^2 \eta_2^2}} \\ \frac{p_3}{\lambda} &= \frac{1 + (t_{2,3}/\lambda)^2 \mu_3^2}{\sqrt{\alpha^2 \eta_3^2}} & \frac{p_4}{\lambda} &= \frac{1 + (t_{1,4}/\lambda)^2 \mu_4^2}{\sqrt{\alpha^2 \eta_4^2}} \end{aligned} \quad (29)$$

**Autres paramètres** Tous les paramètres intervenant dans les équations associées à la condition d'isotropie ont à ce stade été déterminés. Les autres paramètres apparaissant dans les équations de cinématique peuvent alors être déterminés. Ces paramètres sont les composantes des vecteur  $s_i$  ainsi que la norme des vecteurs  $r_i$ . Ils peuvent être choisi librement puisqu'ils n'ont pas de conséquence sur l'isotropie.

## 5 CONCLUSION

Il existe de nombreuses géométries isotopes pour les manipulateurs de la classe topologique H4. Les conditions d'isotropie ont été formulées et une procédure de sélection et de calcul des paramètres du manipulateur a été proposée. Cette procédure permet de choisir et de calculer successivement tous les paramètres géométriques de tous les manipulateurs isotopes de la classe H4.

## RÉFÉRENCES

- [1] Jee-Hwan Ryu, editor. *Parallel Manipulators : New Developments*. I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria, 2008.
- [2] L. Baron and G. Bernier. The design of parallel manipulators of star topology under isotropic constraint. DETC ASME Pittsburgh, Pa, 2001.
- [3] L. Baron, X. Wang, and G. Cloutier. *The Isotropic Conditions of Parallel Manipulators of Delta Topology*. ARK, Caldes de Malavalla, 2002.
- [4] O. Company, F. Marquet, and F. Pierrot. A new high-speed 4-dof parallel robot synthesis and modeling issues. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 19(3) :411–420, June 2003.
- [5] O. Ma and J. Angeles. Optimum architecture design of platform manipulators. *Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments', 91 ICAR., Fifth International Conference on*, pages 1130–1135 vol.2, Jun 1991.
- [6] Jorge Angeles. The design of isotropic manipulator architectures in the presence of redundancies. *The International Journal of Robotics Research*, 11(3) :196–201, 1992.